

Formulário

- Axiomática da Probabilidade

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (1)$$

$$P(A \cap B) = 0 \text{ se } A \text{ e } B \text{ são eventos mutuamente exclusivos.} \quad (2)$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \text{ se } A \text{ e } B \text{ são eventos independentes.} \quad (3)$$

- Lei da Probabilidade Total

$$P(A) = \sum_i P(A \cap B_i) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i) \quad (4)$$

- Teorema de Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \quad (5)$$

Variáveis Discretas

- Função Distribuição de Probabilidade, F

$$F(a) = \sum_{\forall x \leq a} p(x) \quad (6)$$

- Funções de probabilidade marginais de X e Y

$$p_X(x) = \sum_{\forall y} p(x, y) \quad (7) \quad p_Y(y) = \sum_{\forall x} p(x, y) \quad (8)$$

onde $p(x, y)$ é a função de probabilidade conjunta de X e Y .

- Valor Esperado & Variância

$$E[X] = \sum_{\forall i} x_i p(x_i) \quad (9)$$

$$\text{Var}(X) = \sum_{\forall i} (x_i - E[X])^2 p(x_i) \quad (10)$$

$$E[g(X)] = \sum_{\forall i} g(x_i) p(x_i) \quad (11)$$

$$\text{Var}(g(X)) = \sum_{\forall i} (g(x_i) - E[g(X)])^2 p(x_i) \quad (12)$$

onde $g(X)$ é uma função da variável aleatória X .

- Para variáveis aleatórias discretas, X e Y , com função de probabilidade conjunta, $p(x, y)$

$$E[X] = \sum_{\forall i} \sum_{\forall j} x_i p(x_i, y_j) = \sum_{\forall i} x_i p_X(x_i) \quad (13)$$

$$\text{Var}(X) = \sum_{\forall i} \sum_{\forall j} (x_i - E[X])^2 p(x_i, y_j) = \sum_{\forall i} (x_i - E[X])^2 p_X(x_i) \quad (14)$$

$$E[Y] = \sum_{\forall i} \sum_{\forall j} y_j p(x_i, y_j) = \sum_{\forall j} y_j p_Y(y_j) \quad (15)$$

$$\text{Var}(Y) = \sum_{\forall i} \sum_{\forall j} (y_j - E[Y])^2 p(x_i, y_j) = \sum_{\forall j} (y_j - E[Y])^2 p_Y(y_j) \quad (16)$$

$$E[g(X, Y)] = \sum_{\forall i} \sum_{\forall j} g(X, Y) p(x_i, y_j) \quad (17)$$

$$\text{Var}(g(X, Y)) = \sum_{\forall i} \sum_{\forall j} (g(X, Y) - E[g(X, Y)])^2 p(x_i, y_j) \quad (18)$$

onde $g(X, Y)$ é uma função das variáveis aleatórias X e Y .

- Covariância entre X e Y com função de probabilidade conjunta, $p(x, y)$

$$\text{Cov}(X, Y) = \sum_{\forall i} \sum_{\forall j} (x_i - E[X])(y_j - E[Y]) p(x_i, y_j) \quad (19)$$

Variáveis Contínuas

- Função Distribuição de Probabilidade, F

$$F(a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx \quad (20)$$

- Funções densidade de probabilidade marginais de X e Y

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \quad (21) \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx \quad (22)$$

onde $f(x, y)$ é a função densidade de probabilidade conjunta de X e Y .

- Valor Esperado & Variância

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \quad (23)$$

$$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E[X])^2 f(x) dx \quad (24)$$

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx \quad (25)$$

$$\text{Var}(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} (g(x) - E[g(X)])^2 f(x) dx \quad (26)$$

onde $g(X)$ é uma função da variável aleatória X .

- Para variáveis aleatórias contínuas, X e Y , com função densidade de probabilidade conjunta, $f(x, y)$

$$E[X] = \iint_{-\infty}^{+\infty} x f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \quad (27)$$

$$\text{Var}(X) = \iint_{-\infty}^{+\infty} (x - E[X])^2 f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E[X])^2 f_X(x) dx \quad (28)$$

$$E[Y] = \iint_{-\infty}^{+\infty} y f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy \quad (29)$$

$$\text{Var}(Y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} (y - E[Y])^2 f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} (y - E[Y])^2 f_Y(y) dy \quad (30)$$

$$E[g(X, Y)] = \iint_{-\infty}^{+\infty} g(X, Y) f(x, y) dx dy \quad (31)$$

$$\text{Var}(g(X, Y)) = \iint_{-\infty}^{+\infty} (g(X, Y) - E[g(X, Y)])^2 f(x, y) dx dy \quad (32)$$

onde $g(X, Y)$ é uma função das variáveis aleatórias X e Y .

- Covariância entre X e Y com função densidade de probabilidade conjunta, $f(x, y)$

$$\text{Cov}(X, Y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} (x - E[X])(y - E[Y]) f(x, y) dx dy \quad (33)$$

Propriedades

- Propriedades do valor esperado

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y] \quad (34)$$

$$E[aX] = aE[X] \text{ sendo } a \text{ uma constante.} \quad (35)$$

- Propriedades da variância & covariância

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y) \quad (36)$$

$$\text{Var}(aX) = a^2 \text{Var}(X) \text{ sendo } a \text{ uma constante.} \quad (37)$$

$$\text{Se } X \text{ e } Y \text{ são variáveis aleatórias independentes, } \text{Cov}(X, Y) = 0 \quad (38)$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] \quad (39)$$

Distribuições Discretas

- Distribuição Binomial $\rightarrow X$: Número de sucessos numa amostra de n elementos.

$$X \sim \mathcal{B}(n, p) \quad P(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1 - p)^{n-i} \quad (40)$$

sendo p a probabilidade de sucesso. A distribuição binomial apresenta $E[X] = np$ e $\text{Var}(X) = np(1 - p)$

- Distribuição Binomial Negativa $\rightarrow X$: Número de insucessos até atingir r sucessos.

$$X \sim \mathcal{BN}(r, p) \quad P(X = i) = \binom{i+r-1}{i} (1-p)^i p^r \quad (41)$$

sendo p a probabilidade de sucesso. A distribuição binomial negativa apresenta $E[X] = r(1 - p)/p$ e $\text{Var}(X) = r(1 - p)/p^2$.

- Distribuição Hipergeométrica $\rightarrow X$: Número de sucessos numa amostra com dimensão n obtidos de uma população com $N + M$ elementos sem reposição.

$$X \sim \mathcal{H}(N, M, n) \quad P(X = i) = \frac{\binom{N}{i} \binom{M}{n-i}}{\binom{N+M}{n}} \quad (42)$$

sendo N e M o número de sucessos e insucessos na população, respetivamente. A distribuição hipergeométrica apresenta $E[X] = nN/(N + M)$ e $\text{Var}(X) = np(1-p) \left(1 - \frac{n-1}{N+M-1}\right)$.

- Distribuição de Poisson $\rightarrow X$: Número de eventos que ocorrem num determinado intervalo de tempo (ou espaço) quantos estes ocorrem a uma taxa constante e independente do tempo (ou espaço) em que o último evento ocorreu.

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda) \quad P(X = i) = \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} \quad (43)$$

sendo λ o número de eventos que ocorrem num determinado intervalo de tempo (ou espaço). A distribuição de Poisson apresenta $E[X] = \lambda$ e $\text{Var}(X) = \lambda$.

Distribuições Contínuas

- Distribuição Uniforme \rightarrow Se X é uma variável aleatória contínua que segue uma distribuição uniforme, então a sua função densidade de probabilidade é dada por

$$X \sim \mathcal{U}(a, b) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (44)$$

apresentando $E[X] = (a + b)/2$ e $\text{Var}(X) = (b - a)^2/12$.

- Distribuição Exponencial Negativa \rightarrow Se X é uma variável aleatória contínua que indica a distância (espacial ou temporal) entre eventos de um processo de Poisson, então esta segue uma distribuição exponencial negativa com função densidade de probabilidade dada por

$$X \sim \mathcal{EN}(\lambda) \quad f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad (45)$$

apresentando $E[X] = 1/\lambda$ e $\text{Var}(X) = 1/\lambda^2$.

- Distribuição Normal \rightarrow Se X é uma variável aleatória contínua que segue uma distribuição normal, então a sua função densidade de probabilidade é dada por

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (46)$$

apresentando $E[X] = \mu$ e $\text{Var}(X) = \sigma^2$.

Teorema do Limite Central

- Se X_1, X_2, \dots, X_n é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e distribuídas identicamente, cada uma com uma média μ e variância σ^2 , então para n grande ($n > 30$), a distribuição de

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2) \quad (47)$$

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n) \quad (48)$$

Estimação Pontual

- Estimador de Máxima Verossimilhança (EMV). O valor de θ que maximiza a função

$$\mathcal{L}(\theta|\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) \text{ ou } \log \mathcal{L} = \sum_{i=1}^n \log(f(x_i|\theta)), \quad (49)$$

é a estimativa de máxima verossimilhança, onde $f(x_i|\theta)$ é a função probabilidade ou densidade de probabilidade das observações (X_1, X_2, \dots, X_n) parametrizada por θ .

- Qualidade de um estimador (Erro médio quadrático)

$$\text{EMQ}(\hat{\theta}) = (E(\hat{\theta}) - \theta)^2 + \text{Var}(\hat{\theta}) \quad (50)$$

Estatística Descritiva

Considerando uma amostra (X_1, X_2, \dots, X_n) , então

– Média Amostral, \bar{X}

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (51)$$

– Variância Amostral, S^2

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (52)$$

Estimação Intervalar

- Intervalo de confiança (de $1 - \alpha$) para μ com μ desconhecido e variância σ^2 conhecida.

$$\left[\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] \quad (53)$$

- Intervalo de confiança (de $1 - \alpha$) para μ com μ desconhecido e variância σ^2 desconhecida.

$$\left[\bar{X} - t_{\alpha/2, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\alpha/2, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} \right] \quad (54)$$

- Intervalo de confiança para σ^2 com μ desconhecido e variância σ^2 desconhecida.

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2, n-1}^2}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2, n-1}^2} \right] \quad (55)$$

Teste de Hipótese

- Teste à média (com variância σ^2 conhecida)

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad H_a : \mu \neq \mu_0 \quad | \quad H_0 : \mu \leq \mu_0 \quad H_a : \mu > \mu_0 \quad | \quad H_0 : \mu \geq \mu_0 \quad H_a : \mu < \mu_0$$

$$\text{ET} = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (56)$$

- Teste à média (com variância σ^2 desconhecida)

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad H_a : \mu \neq \mu_0 \quad | \quad H_0 : \mu \leq \mu_0 \quad H_a : \mu > \mu_0 \quad | \quad H_0 : \mu \geq \mu_0 \quad H_a : \mu < \mu_0$$

$$\text{ET} = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sim t_{n-1} \quad (57)$$

- Teste à variância

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad H_a : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \quad | \quad H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \quad H_a : \sigma^2 > \sigma_0^2 \quad | \quad H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \quad H_a : \sigma^2 < \sigma_0^2$$

$$ET = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_{n-1}^2 \quad (58)$$

- Teste de comparação de variâncias

$$H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2 \quad H_a : \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2 \quad | \quad H_0 : \sigma_x^2 \leq \sigma_y^2 \quad H_a : \sigma_x^2 > \sigma_y^2 \quad | \quad H_0 : \sigma_x^2 \geq \sigma_y^2 \quad H_a : \sigma_x^2 < \sigma_y^2$$

$$ET = \frac{S_x^2}{S_y^2} \sim F_{n-1, m-1} \quad (59)$$

- Teste de amostras emparelhadas

$$H_0 : \mu_w = 0 \quad H_a : \mu_w \neq 0 \quad | \quad H_0 : \mu_w \leq 0 \quad H_a : \mu_w > 0 \quad | \quad H_0 : \mu_w \geq 0 \quad H_a : \mu_w < 0$$

$$ET = \sqrt{n} \frac{\bar{W}}{S_W} \sim t_{n-1} \quad (60)$$

- Teste de aderência (χ^2)

$$H_0 : X \sim \mathcal{F}_\theta \quad H_a : X \not\sim \mathcal{F}_\theta$$

$$ET = \sum_{i=1}^k \frac{(X_i - n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i} \sim \chi_{k-1-m}^2 \quad (61)$$

sendo k o número de classes e m o número de parâmetros da distribuição \mathcal{F} estimados pelo método da máxima verossimilhança.

Alerta: De modo a garantir a validade do teste de aderência, verifique que $n\hat{p}_i$ (frequência esperada) é pelo menos 5 para todas as classes. Se tal não for verificado, agrupe classes vizinhas, somando-as, até que a frequência esperada seja superior a 5 para todas as novas classes.