ISEC Lisboa

Licenciatura em Ciências Aeronáuticas e do Espaço

Matemática Computacional Aplicada

ESCOLA DE GESTÃO, ENGENHARIA E AERONÁUTICA

Preparação para 1ª Frequência (14 de dezembro de 2026)

Nome: **Número de estudante:**

1. Considere que para um Airbus A321, o coeficiente de sustentação, C_L varia com o ângulo de ataque, α (em radianos), de acordo com a seguinte função

$$C_L = 0.2 + \sin\alpha - 0.5\alpha^3.$$

Obtenha uma estimativa para o coeficiente de sustentação quando $\alpha = 0.15$ utilizando um polinómio de Taylor de quarta ordem expandido em $\alpha = 0.1$. Determine o erro absoluto e relativo de tal estimativa.

2. Durante a fase de rotação de uma descolagem, o ângulo de arfagem de um Airbus A220 aumenta de uma forma suave que pode ser aproximada por

$$\theta = 1.2 + 0.9t - 0.06t^2 + 0.0025t^3,$$

onde θ é o ângulo de arfagem e t é o tempo em segundos após o início da fase de rotação ($0 \leq t \leq 10$). Estime qual a velocidade angular de arfagem, θ', em $t = 1\,\text{s}$ e a aceleração angular de arfagem, θ'', em $t = 5\,\text{s}$. Obtenhas as estimativas utilizando as fórmulas de diferenças finitas.

3. Um Airbus A330-900*neo*, com uma área alar $S = 396\,\text{m}^2$, está em cruzeiro a uma altitude onde o ar possui uma massa volúmica $\rho = 0.60\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}$ e com um coeficiente de sustentação $C_L = 0.3$. Sabendo que neste momento a aeronave apresenta um peso $W = 1\,471\,500\,\text{N}$, qual a velocidade necessária para manter um voo nivelado, ou seja,

$$W = L.$$

A força de sustentação de uma aeronave, L, é calculada por

$$L = \frac{1}{2}\rho U^2 S C_L,$$

onde ρ é a massa volúmica do ar, U é a velocidade verdadeira do ar, S é a área alar da aeronave e C_L é o coeficiente de sustentação. Utilizando o método da bissecção **OU** da posição falsa, obtenha um intervalo para a velocidade, U, realizando 3 iterações.

4. Um Airbus A350 está equipado com o sistema *Brake to Vacate (BTV)*, o qual permite, após toque com o solo, aplicar uma força de travagem específica para sair numa saída de pista predeterminada. A força de travagem de uma aeronave, F_b está relacionada com a distância de paragem através da equação

$$\frac{mV_0^2}{2F_b\mu} - d = 0,$$

onde $m = 125\,000\,\text{kg}$ é a massa da aeronave, $V_0 = 75\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$ é a velocidade de solo no momento do toque, $\mu = 0.35$ é o coeficiente de fricção entre a borracha e a pista e d é a distância de paragem. Sabendo que no momento do toque com o solo, o BTV recebe a informação que a distância de paragem é de $950\,\text{m}$, determine utilizando o método de Newton **OU** da secante, uma estimativa para a força de travagem, realizando pelo menos 3 iterações.

5. Um Airbus A320 está a voar um segmento de 1000 km entre Lisboa e Paris. O sistema de gestão de voo (*flight management system (FMS)*) permite que a altitude de cruzeiro seja otimizada de modo a minimizar o consumo de combustível específico (*SFC*) devido à mudança da massa volúmica do ar na atmosfera e da eficiência dos motores com a altitude.

A relação entre o SFC e altitude de cruzeiro é descrita aproximadamente por

$$f(h) = 0.06 + 5 \times 10^{-4}(h-10)^2 + 3 \times 10^{-5}(h-13)^4,$$

onde o h pode variar entre 9 km e 14 km. Utilizando o método da método da secção áurea **OU** o método da interpolação quadrática, obtenha um intervalo/estimativa para a altitude, h, que minimiza o consumo de combustível, $f(h)$, realizando 3 iterações.

6. Um Airbus A400 em voo nivelado sofre pequenas perturbações no *ângulo de ataque*, α, e na *deflexão do leme de profundidade*, δ_e. O coeficiente de sustentação C_L e o coeficiente de momento de arfagem C_m variam linearmente com estes parâmetros da seguinte forma

$$\begin{aligned} C_L &= C_{L_0} + C_{L_\alpha}\,\alpha + C_{L_{\delta_e}}\,\delta_e \\ C_m &= C_{m_0} + C_{m_\alpha}\,\alpha + C_{m_{\delta_e}}\,\delta_e \end{aligned}.$$

Considere uma aeronave que apresenta as derivadas de estabilidade apresentadas na tabela abaixo.

C_{L_0}	C_{L_α}	$C_{L_{\delta_e}}$	C_{m_0}	C_{m_α}	$C_{m_{\delta_e}}$
0.25	5.7	0.3	0.04	-0.85	-1.25

Utilize o método de Jacobi **OU** o método de Gauss-Seidel para determinar qual o ângulo de ataque, α, e a deflexão do profundor, δ_e, necessários para manter voo nivelado, sabendo que, num dado instante, este ocorre quando $C_L = 0.4$ e $C_m = 0$. Execute pelo menos 3 iterações.

7. Na altitude de cruzeiro, um Airbus A380 deve satisfazer as condições de equilíbrio propulsivo e aerodinâmico. Isto significa que

$$T = D \quad \wedge \quad L = mg \quad \wedge \quad M = 0,$$

onde T é a força propulsiva, D é a resistência aerodinâmica, L é a sustentação, m é a massa da aeronave, g é a aceleração gravítica e M é o momento de arfagem. As forças de sustentação, de resistência aerodinâmica e o momento de arfagem podem ser calculados por

$$L = \frac{1}{2}\rho U^2 S C_L \quad , \quad D = \frac{1}{2}\rho U^2 S C_D \quad \text{e} \quad M = \frac{1}{2}\rho U^2 S C_M c,$$

respetivamente, onde ρ é a massa volúmica do ar, U é a velocidade verdadeira do ar, S é a área alar da aeronave, C_L é o coeficiente de sustentação, C_D é o coeficiente de resistência aerodinâmica, c é a corda média aerodinâmica e C_M é o coeficiente de momento de arfagem. Por sua vez, os coeficientes aerodinâmicos variam com o ângulo de ataque da aeronave da seguinte forma

$$\begin{cases} C_L = 0.08 + 5.5\alpha + 0.3\delta_e \\ C_D = 0.022 + 0.07C_L^2 \\ C_M = 0.04 - 0.85\alpha - 1.25\delta_e \end{cases},$$

onde δ_e é a deflexão do *elevator*. Sabendo que o Airbus A380 possui uma área alar $S = 845\,\mathrm{m}^2$, uma corda $c = 12.3\,\mathrm{m}$ e que no momento apresenta uma massa $m = 400\,000\,\mathrm{kg}$, formule o sistema de equações que permite descobrir a velocidade verdadeira, U, o ângulo de ataque, α e a deflexão do profundor, δ_e, quando a aeronave realiza cruzeiro a uma altitude onde a massa volúmica do ar $\rho = 0.36\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, $g = 9.76\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ e $T = 350\,\mathrm{kN}$.

Resolva o sistema utilizando o método de Newton utilizando o vetor

$$\begin{bmatrix} U \\ \alpha \\ \delta_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 250 \\ 0.03 \\ -0.01 \end{bmatrix}$$

como ponto de partida. Utilize a eliminação de Gauss ou a eliminação de Gauss-Jordan para resolver o sistema linear de equações intermédio.